



TITLE:

壁に沿って周期的な温度勾配を与えた管の中を伝播する非線形音響パルス波のエネルギー-増幅 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

杉本, 信正; 清水, 大

---

CITATION:

杉本, 信正 ...[et al]. 壁に沿って周期的な温度勾配を与えた管の中を伝播する非線形音響パルス波のエネルギー-増幅 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2003, 1311: 173-178

ISSUE DATE:

2003-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42925>

RIGHT:

# 壁に沿って周期的な温度勾配を与えた管の中を伝播する 非線形音響パルス波のエネルギー増幅

阪大院 基礎工 杉 本 信 正 (Nobumasa SUGIMOTO)  
清 水 大 (Dai SHIMIZU)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

## 1. はじめに

管内の気体中を一方向に伝播する非線形音響パルス波に対して、管壁温度を伝播の向きにある適当な一定勾配で上昇させると、熱音響効果によってパルス波のエネルギー流束（以下簡単にエネルギーと呼ぶこともある）を増加させることができる。本論文は、温度が軸方向に周期的に変化する場合を想定し、このときにでもエネルギー増幅が得られるかを調べる。図 1 に示すように、 $x$  軸を管に沿ってとり、管壁温度が管の端  $x = 0$  での値  $T_0$  から一定の勾配で増加し、 $x = x_1$  で  $T = T_1 (> T_0)$  に到達した後  $x = x_2$  まで一定温度を保ち、そして今度は一定勾配で減少し  $x = x_3$  で  $T = T_0$  に戻り、 $x = x_4$  までその温度を保つものとする。 $x > x_4$  では長さ  $x_4$  を一周期として、同様の温度分布が繰り返すものとする。エネルギーは温度勾配が負やゼロの箇所では減衰するので、興味はパルス波が一周期伝播した後に、そのエネルギーが減衰分を埋め合わせて果たして増幅するかにある。衝撃波の発生によるエネルギー損失を防ぐために、ヘルムホルツ共鳴器列を取り付ける。

パルス波としては滑らかな方形パルス波を入力し、その空間発展を既に導出した方程

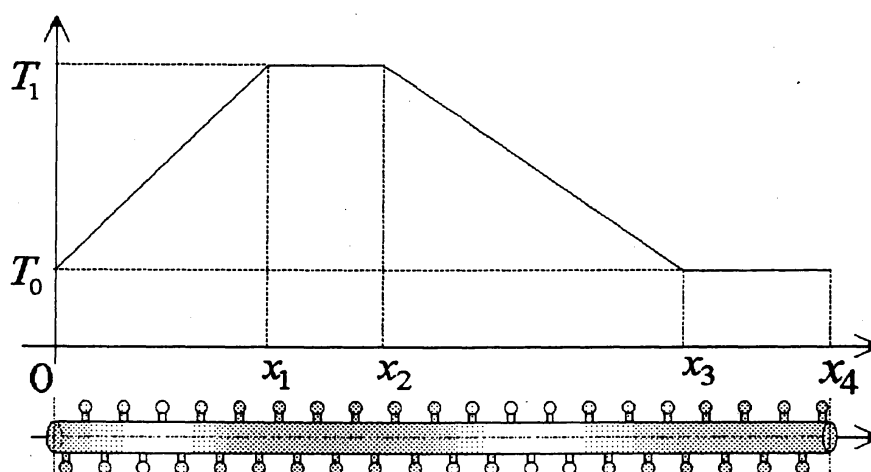


図 1: 一周期内の温度分布

式[1]を数値的に解くことによって調べ、エネルギー増幅の可能性を明らかにする。こうした周期的な温度分布は、現実には管路を一定直径でコイル状に巻き、その側面を恒温槽に浸すことによって実現できるであろうが、本来ループ管路内でのエネルギー増幅の可能性の有無を調べるために考えたものである。

## 2. 非線形波動方程式による解析

解析は論文[1]において導出された方程式(5.10),(5.11)を数値的に解くことにより行う。詳しくは論文ないし講究録[2]を参照されたい。以下、論文と同じ記号を用いる。方程式(5.10),(5.11)を適当に規格化すると、結合パラメータ  $K$  を取り除き、すなわち  $K=1$  とおき、同調パラメータ  $\Omega_e$  を規格化された温度  $H_e(=T_e/T_0)$  に置くことができる。ただし、 $T_0$  は  $x=0$  での基準温度であり、 $T_e(x)$  は管の中の気体の平衡温度であり、管壁温度に等しいとおいて差し支えない。添え字  $0, e$  を付けた量は、それぞれ  $x=0$  での基準状態および場所  $x$  での平衡状態での値を表す。規格化された方程式は以下ようになる：

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{4H_e} \frac{dH_e}{dX} f = -\delta_e \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda_e}{H_e} \frac{dH_e}{dX} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{-\frac{1}{2}}} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \delta_{re} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^{\frac{1}{2}} g}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} \right) + H_e g = H_e f. \quad (2)$$

ただし、非整数  $\pm 1/2$  階微分は次のように定義される：

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \theta^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta'}} \frac{\partial^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\partial \theta'^{\alpha+\frac{1}{2}}} f(\theta', X) d\theta', \quad (\alpha = \pm 1/2). \quad (3)$$

ここで、 $f, g$  はそれぞれ気体速度ベクトルの管軸方向成分  $u$  および共鳴器の空洞内超過圧  $p'_e$  を表しており、それぞれ局所線形音速  $a_e(x)$  および平衡圧  $p_e(\equiv p_0)$  を用いて  $\kappa f = (\gamma+1)u/a_e (\approx [(\gamma+1)/\gamma]p'/p_0)$ ,  $\kappa g = [(\gamma+1)/\gamma]p'_e/p_0$  と表される。ただし、 $\kappa (\ll 1)$  は共鳴器列の大きさを表すパラメータで、空洞体積を共鳴器取り付け間隔当たりの管の体積で除した量であり、 $\gamma$  は比熱比である。変数  $f$  は管の中の超過圧  $p'$  に最低次では等しい。独立変数  $\theta, X$  は遅延時間および遠方場座標を表し、それぞれ以下のように定義される：

$$\theta = \omega_0 \left( t - \int_0^x \frac{dx}{a_e} \right) \quad \text{および} \quad X = \frac{\kappa \omega_0}{2} \int_0^x \frac{dx}{a_e}. \quad (4)$$

ここで、 $t$  は時間、 $\omega_0$  は  $x=0$  での共鳴器の固有角振動数である。なお、 $a_e(x)$  および  $\omega_e(x)$  は温度  $T_e$  の平方根に比例するので、 $a_e/a_0 = \omega_e/\omega_0 = \sqrt{H_e}$  となることに注意する。係数  $\delta_e, \lambda_e$  および  $\delta_{re}$  は、速度ならびに温度境界層による履歴効果を表し、 $\beta$  は音の拡散効果を表す。これらは次のように定義される：

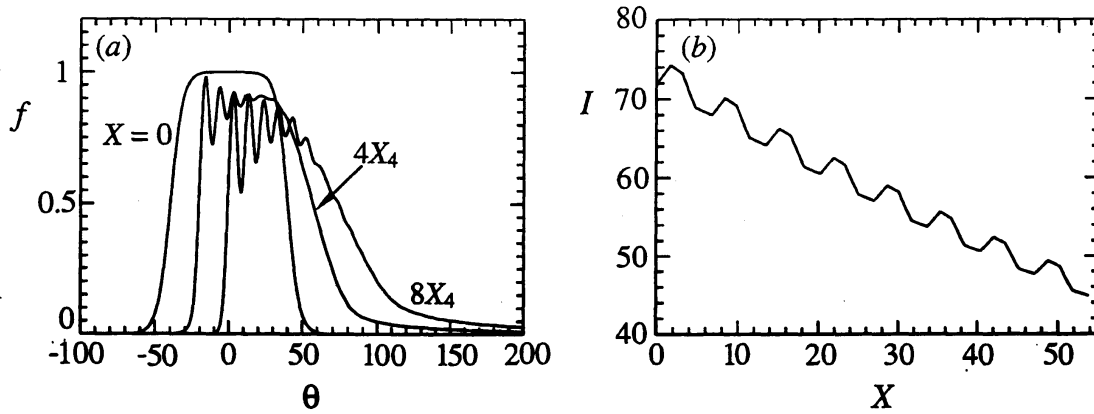


図 2: 温度比  $T_1/T_0 = 2$  の場合における  $f$  の初期, 4 周期, 8 周期後の波形 (a) とエネルギー流束  $I$  の空間的变化 (b).

$$\delta_e = 2C \frac{\sqrt{\nu_e/\omega_0}}{\kappa R^*}, \quad \lambda_e = \left( \frac{C}{4} + C_T \right) \frac{\sqrt{\nu_e/\omega_0}}{R^*}, \quad \delta_{re} = \frac{2\sqrt{\nu_e/\omega_0}}{r}, \quad \beta = \frac{\nu_{de}\omega_0}{\kappa a_e^2}. \quad (5)$$

ここで,  $C = 1 + (\gamma - 1)/\sqrt{Pr}$ ,  $C_T = 1/2 + 1/(\sqrt{Pr} + Pr)$  ( $Pr$ : Prandtl 数) であり,  $r$  は共鳴器スロート半径,  $R^*$  は  $\kappa$  の値が十分小さいので, 管の半径  $R$  に実質殆ど等しい. また,  $\nu_e(x)$ ,  $\nu_{de}(x)$  は局所的な動粘性率, 音の拡散率である. ただし, 比熱比, Prandtl 数, 粘性率, 熱伝導率の温度依存性はないものと仮定している. 係数 (5) の場所  $x$  での値は,  $x=0$  での値と  $(\delta_e, \lambda_e, \delta_{re}) = (\delta_0, \lambda_0, \delta_{r0})\sqrt{H_e}$  で関係付けられ, 1 より十分小さい. また,  $\beta$  は音の拡散率により決まる量であるが, その値は境界層によるものより遙かに小さく, 温度には依存しない.

### 3. エネルギー流束の増幅

図 1 に示すような区分的に直線部分からなる温度分布を考えると, 温度勾配の不連続点で温度が緩やかに変化するとした (1), (2) の導出の仮定が崩れるが, そのような点は可算個であるので特に配慮はしない. 温度比  $T_1/T_0 (> 1)$  を  $\eta$  とおき,  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) に相当する  $X$  の座標を  $X_j$  とすると,  $H_e$  は  $X$  について次に示す放物線状に変化する:

$$H_e = \begin{cases} [1 + (\sqrt{\eta} - 1)X/X_1]^2 & \text{in } 0 \leq X \leq X_1, \\ \eta & \text{in } X_1 \leq X \leq X_2, \\ [\sqrt{\eta} - (\sqrt{\eta} - 1)(X - X_2)/(X_3 - X_2)]^2 & \text{in } X_2 \leq X \leq X_3, \\ 1 & \text{in } X_3 \leq X \leq X_4. \end{cases} \quad (6)$$

なお,  $X \geq X_4$  においては  $H_e$  は周期  $X_4$  で拡張される. 温度  $T_e$  の区分的に直線区間の長さをそれぞれ  $l_j (= x_j - x_{j-1})$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ;  $x_0 = 0$ ) とすると,  $X_1 = \kappa\omega_0 l_1 / (\sqrt{\eta} + 1)a_0$ ,  $X_2 - X_1 = [(\sqrt{\eta} + 1)/2\sqrt{\eta}]l_2 X_1 / l_1$ ,  $X_3 - X_2 = l_3 X_1 / l_1$ ,  $X_4 - X_3 = [(\sqrt{\eta} + 1)/2]l_4 X_1 / l_1$

となる。本解析では、論文[1]と同じく  $\kappa\omega_0 l_1/(\eta-1)a_0 = 4$  とおくと、 $0 \leq X \leq X_1$  では  $H_e = (1 + X/4)^2$  となる。この分布は、次に示す方形パルス波に対してエネルギーの増幅を与えることが示されている[1]：

$$f(\theta, X=0) = \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{\theta}{8} + 5\right) - \tanh\left(\frac{\theta}{8} - 5\right) \right]. \quad (7)$$

パルス波が場所  $X$  を通して輸送する全エネルギー流束は次の積分値  $I$  に比例する：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_e^{\frac{1}{2}} f^2 d\theta. \quad (8)$$

さて、方程式(1), (2)を初期値(7)の下で解いた結果を図2に示す。図2(a)には  $X=0$ ,  $X=4X_4$ ,  $X=8X_4$  での  $f$  の波形を示し、図2(b)には  $I$  の空間的变化の様子を示す。計算は、直径8 cmの管に  $\kappa = 0.2$ ,  $\omega_0/2\pi = 238$  Hzの共鳴器列を取り付けた場合を想定し、空気を大気圧下、室温  $T_0 = 288$  K ( $= 15^\circ\text{C}$ ) から  $T_1 = 576$  K ( $= 303^\circ\text{C}$ ) に温度を二倍上昇させるものとして、区間長さを  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 \approx 4.5$  m とする。このとき係数は  $\delta_0 = 0.0361$ ,  $\lambda_0 = 0.00370$ ,  $\delta_{r0} = 0.0554$ , and  $\beta = 2.33 \times 10^{-6}$  となり、 $\eta = 2$  では、 $X_1 \approx 1.66$ ,  $X_2 \approx 3.07$ ,  $X_3 \approx 4.73$  and  $X_4 \approx 6.73$  となる。

$f$  の波形は、共鳴器列による分散効果によって幾つかの小さなパルス列に分裂するのが見られる。個々のパルスは  $X$  が大きくなるとおそらく孤立波に分かれて行くものと考えられる。管の中の超過圧に相当する  $f$  の最大値は、4周期、8周期と伝播するにつれ小さくなる。また、境界層の履歴効果によって、パルス背後に尻尾が現れるのが特徴である。一方、図2(b)の全エネルギー流束  $I$  は、温度勾配が正の区間では増加しているものの、勾配がゼロ以下の区間では減少して、一周周期経た後では減少している。すなわち、増幅分が全て失われている。温度比を3倍にし、区間長さ  $l_j$  ( $j = 2, 3, 4$ ) を変化させても、結果は定性的に変わらない。

そこで温度勾配が正の区間での増幅量を大きくするため工夫をする。増幅は境界層が管内部の主流部に対して仕事をする結果生じるので、管の濡れ縁（気体が管壁と接している長さで、半径  $R$  の管では円周  $2\pi R$  である）を増加させればよい。そこで、管の中に厚さが十分薄く長い平板を管軸に平行に挿入し、管壁と同じ温度分布を印加するものとする。ただし、温度勾配が正の区間のみ適用する。図3は幅  $R$  の薄い平板を3枚挿入した管の断面である。平板の間隔は  $R/2$  にとってあるが、境界層厚さより十分大きければよい。平板は十分薄いので端での反射が無視出来るものとする。管の中の一方向伝播を記述する方程式(1), (2)を用いることができる。平板を挿入した効果は、係数  $\delta_e$ ,  $\lambda_e$  の項を通して取り入れられる。方程式は円形断面以外の管にも適用でき、そのとき  $\delta_e$ ,  $\lambda_e$  の定義の分母の  $R^*$  は水力半径となる。水力半径は管の断面積  $\pi R^2$  を濡れ縁の半分で割ったものである。

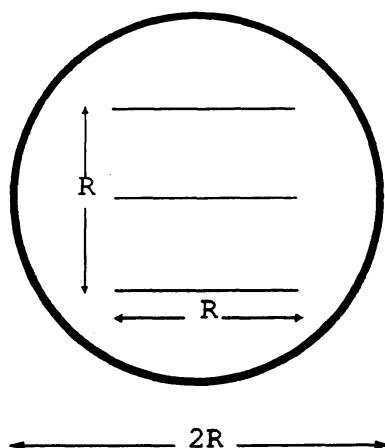


図 3: 管の中に幅が半径に等しい十分薄い平板を, 半径の半分の間隔で 3 枚挿入した場合の断面図. ただし, 温度勾配が正の区間のみ挿入する.

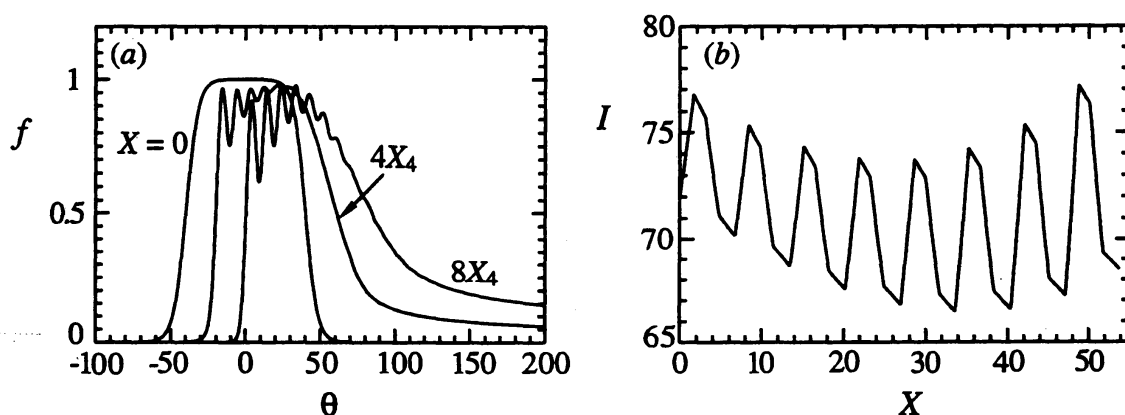


図 4: 温度比  $T_1/T_0 = 2$  を保ったまま図 3 に示す平板を挿入した場合の  $f$  の初期, 4 周期, 8 周期後の波形 (a) とエネルギー流束  $I$  の空間的变化 (b).

から, 図 3 の場合には濡れ縁は管の円周に加えそれぞれの平板の上下面長さを入れると,  $2\pi R + 2R \times 3 \approx 12R$  となり, 水力半径は約  $R/2$  となる. この結果, 平板を挿入しない場合に比べて,  $\delta_e, \lambda_e$  の値は 2 倍になる.

さて, 区間  $nX_4 \leq X \leq X_1 + nX_4$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) での  $\delta_e, \lambda_e$  の値をこれまでの値の 2 倍にした場合の波形とエネルギーの変化を図 4 に示す. 図 4 (a) では, 幾つかのパルス波が現れるのは図 2 (a) と同じであるが, 8 周期後の最大圧力は初期値を回復する一方, パルス波背後の尻尾が大きく長くなる. 尻尾の効果を出来るだけ取り込むために, 図 2 でも計算領域は  $\theta = 1200$  まで広げてある. 次に全エネルギー流束は最初減衰するが, 4 周期目ぐらいから増幅に転じる. 次にもし平板を 6 枚挿入すれば水力半径が約  $1/3$  になるので,  $\delta_e, \lambda_e$  の値を 3 倍に増加させることができる. この場合の波形と全エネルギー流束の

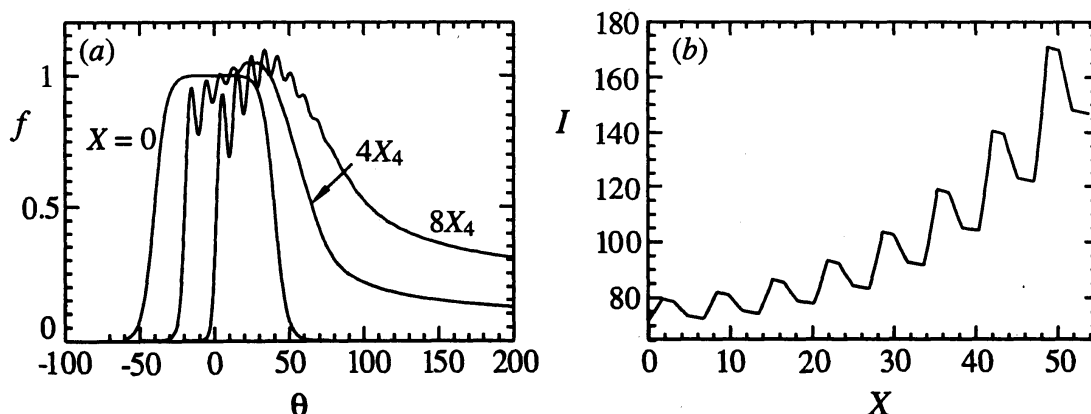


図 4: 温度比  $T_1/T_0 = 2$  を保ったまま平板を 6 枚挿入し水力半径を  $1/3$  にした場合の  $f$  の初期, 4 周期, 8 周期後の波形 (a) とエネルギー流束  $I$  の空間的变化 (b).

変化を図 5 に示す. 8 周期後の最大圧力は初期値を上回り, 尻尾というよりパルス波形本体が変形を始める. また, エネルギーは顕著に増幅することが見られ, 8 周期後では約 2 倍にも達する.

#### 4. おわりに

管の中を一方向に伝播する非線形圧縮パルス波に対して, 管壁温度を軸方向に一定間隔で周期的に繰り返し変化させるときの伝播の様子とパルス波が輸送する全エネルギー流束の空間的变化を調べた. 温度勾配を適当な正の値に設定すればエネルギーが増幅する一方, 勾配がゼロ以下の箇所では減衰することが知られているが, それらを組み合わせた場合についての増幅の可能性は今回初めて明らかになった. 直径 8cm の管を想定し, 大気圧下の空気を室温から軸方向距離約 4.5 m で約  $300^\circ\text{C}$  に上昇させるとすれば, 増幅は起こらない. しかし, 温度勾配が正の区間に数枚の平板を入れ滞れ縁を増加させることによって実質的に管の水力半径を局所的に小さくすれば, 増幅は可能である. この結果から, ループ管路をパルス波が周回する場合にも増幅は期待される.

#### 参考文献

1. Sugimoto, N and Tsujimoto, K. "Amplification of energy flux of nonlinear acoustic waves in a gas-filled tube under an axial temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **456**, 377-409 (2002).
2. 杉本信正, "共鳴器列を取り付けた管路内の非線形音波の伝播と熱音響効果による増幅," 京都大学数理解析研究所講究録#1209, 115-123 (2001).